TDs : Flots

## 1 - Loi de Kirchhoff et algorithme de Ford-Fulkerson

### Exercice 1.1



u1 u2 u3 u4 u5 u6

10 4 0 10 4 0

1.2

Loi de Kirchhoff: pour tout noeud x, x =/= s, t



Donc pour tout arc qui rentre dans A appelé u, w+ est un arc sortant de A et w- est un arc entrant dans A.

(x, y) ∋ w-(A) : c ∌ A et y ∋ A

(x, y) ∋ w+(A) : c ∋ A et y ∌ A

Pour tout x ∋ A : somme y ∋ w-(x) φ(y, x) = somme y ∋ w+(x) φ(x, y)

=> (F) somme x ∋ A somme y ∋ w-(x) φ(x, y) = somme x ∋ A somme y ∋ w+(x) φ(x, y)

si (x1, x2) ∋ U x1, x2 ∋ A

x1 ∋ w-(x2) et x2 ∋ w+(x1)

donc φ(x1, x2) apparaît des 2 côtés

Soit “Quand on a simplifié pour tous les arcs internes A, il reste les arcs de w-(A) à gauche et w+(A) à droite

=> loi de K. généralisée.

### Exercice 2.1

Par définition une coupe est une partition d’un ensemble de nœuds qui ne continent pas en même temps S et T avec comme capacité la somme des arc sortant.



A = {S, 1, 3}

X - A = {2, 4, T}

caps(A, X\A) = 8 + 3 + 7

= 18

2.2

A’ = {S, 1, 2}

caps(A’, X\A’) = 12

2.3



2.4



2.5

|  | S1 | S2 | 12 | 13 | 23 | 24 | 3T | 43 | 4T | valeur |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| φ0 | 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 0 | 1 | 4+1 = 5 |
| S24T + 5  φ1 |  | 6 |  |  |  | 6 |  |  | 6 | 4+6 = 10 |
| S13T + 1  φ2 | 5 |  |  | 3 |  |  | 5 |  |  | 5+6 = 11 |
| S213T + 1  φ3 |  | 7 | 1 | 4 |  |  | 6 |  |  | 6+6 = 12 |

Dernier passe:

marquage de 1, 2

On n’arrive pas en t => φ0T max atteint.

## 2 - Modélisation

(Châteaux d’eau). On considère 2 châteaux d’eau A et B alimentant 3 villages C, D et E.

Le château d’eau A peut être alimenté avec 50 litres par seconde, et B avec 80 litres par seconde.

Le village C a besoin au maximum de 70 l/s, D de 30 l/s et E de 30 l/s. Les capacités des

canalisations en l/s sont :

| canalisation | AC | AD | BD | BE |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| capacité en l/s | 40 | 20 | 50 | 20 |

### Exercice 3.1



2.2





| canalisation | sA | sB | AC | AD | BD | BE | Ct | Dt | Et | valeur |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| φ0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| SACT + 40  φ1 | 40 |  | 40 |  |  |  | 40 |  |  | 40 |
| SBET + 20  φ2 |  | 20 |  |  |  | 20 |  |  | 20 | 60 |
| SBDT + 30  φ3 |  | 50 |  |  | 30 |  |  | 30 |  | 90 |

coupe = {S,A,B,D}, {C,E,T}

capa = 40 + 30 + 20 = 90

### Exercice 4



### Exercice 5

les capacités capa(u) toutes égales à 1.



5.1

coupe {S, X5, Y1, Y2, X1, X3}

arc sortants:

{SX2, SX4, Y1t, Y2t}

capacité = 4

val(flot) = 4



5.2 - 5.3

C = ensemble des arêtes de G qui correspondent à 5 des arcs ayant un flux de 1 sur le flot.

* Si C contient deux arêtes adjacentes en Xi : le flux sortant vaudrait 2, donc le flux entrant vaudrait 2, impossible car un seul arc entrant avec une capacité de 1.
* On a un raisonnement similaire en Yi.

5.4

Couplage = {

X1 Y1,

X2 Y4,

X3 Y2,

X4 Y5,

}

Maximum (card. max) => maximal pas parfait. car X5,Y3 n'apparaissent pas dans C

(Parfait veut dire que tous les sommets apparaissent dans le couplage.)

## 3 - Graphe d’écart et flots à coûts

### Exercice 7



Le premier graph a un chemin possible (ex: S24t) alors que le second a atteint le flot max car il n’y a pas de chemin de S à t.

### Exercice 8





SMTP = 13

SMTCP = 20

SMCP = 18